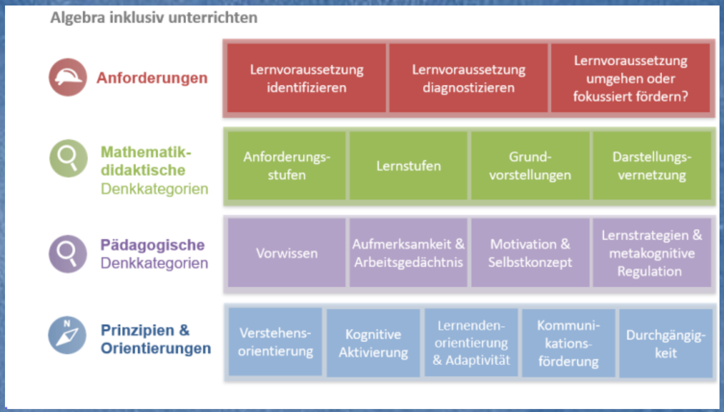
# TEDS-IME

Teacher Education and Development Study
Inclusive Mathematics Education

## Algebra inklusiv unterrichten

Teil 1: Wichtige Anforderungen erkennen und bei Term- und Äquivalenzumformungen umsetzen




Hintegrundbild freepik.com

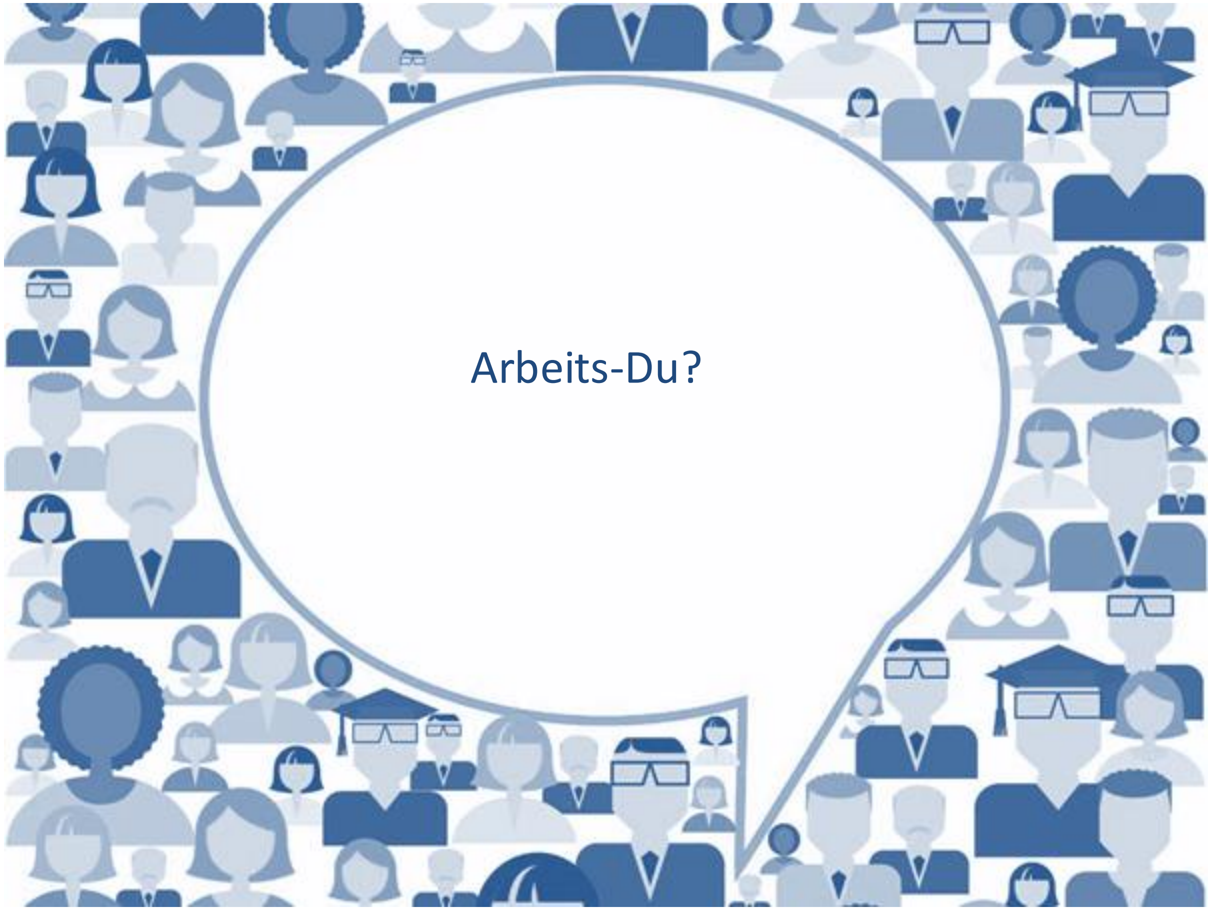

**Sabine Sondermann & Martin Musterfrau** Hier eigenen Namen einfügen



Aus- und Fortbildungsmaterial wurde entwickelt im Rahmen von TEDS-IME
unter aktiver Mitwirkung von Claudia Ademmer

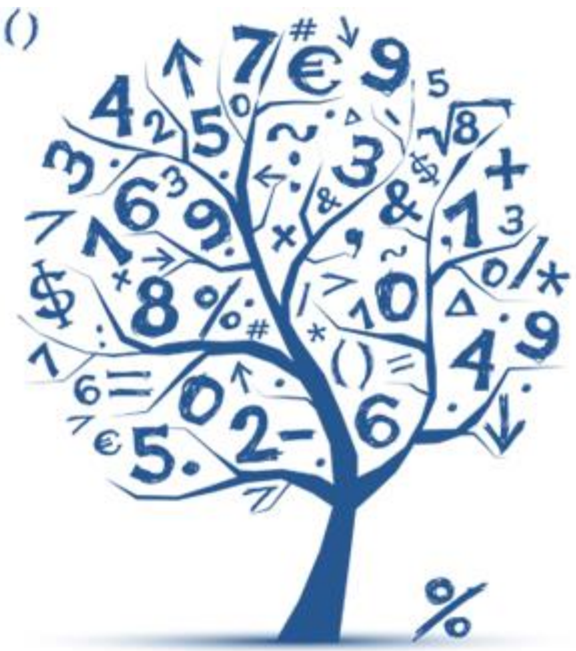
# Unser Programm für heute

1. **Begrüßung, Einleitung & Ziele für heute**
2. Differenzieren im inklusiven Algebra-Unterricht am Beispiel von Termumformungen
3. Verstehensorientiertes Lernen am Beispiel von Äquivalenz-umformungen (Teil I)
4. Abschluss


Arbeits-Du?

*Worum geht es?*

# Algebra inklusiv unterrichten





Algebra umfasst im Unterricht der Sekundarstufe I die Themenbereiche Zahlen, Terme, Gleichungen und Funktionen (Vollrath, 2003).

*Worum geht es?*

# Algebra inklusiv unterrichten

**xx.xx**

## 1. Sitzung

Term- und Äquivalenz-umformungen

**xx.xx.**

## 2. Sitzung

Äquivalenz-umformungen

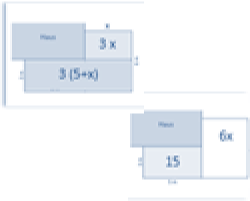
**xx.xx.**

## 3. Sitzung

Äquivalenz-umformungen

**xx.xx.**

## 4. Sitzung




Termgleich-wertigkeit

**xx.xx.**

## 5. Sitzung

Terme aufstellen & beschreiben

*Worum geht es?*

# Algebra inklusiv unterrichten

*Pragmatische Definition im Sinne von Leistungsentwicklung:*
„Schulische Inklusion ist die bestmögliche akademische Förderung von Lernenden durch Berücksichtigung ihrer lernbezogenen Bedürfnisse, um individuell bestmögliche Lernergebnisse zu erreichen.“ (Piezunka, Grosche & Schaffus, 2017, S. 217f.)

➢ Leitfrage für Veranstaltungsreihe:

- Wie kann ein inklusiver Unterricht gestaltet werden,
  der den Bedürfnissen von allen Lernenden gerecht wird?

  hierbei: besondere Berücksichtigung von Schüler*innen
  mit geringen Lernvoraussetzungen

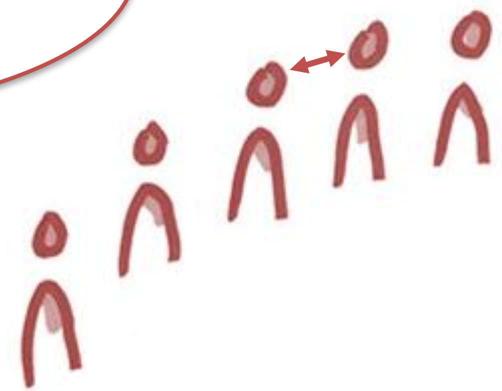
Folie nur in spez. Gruppen

Soziometrisches Kennenlernen:

# Ich habe bereits … mal Terme/ Variablen/ Gleichungen im Unterricht der Sek I eingeführt.

Folie nur in spez. Gruppen

Tauschen Sie sich kurz mit
Ihren Nachbar*innen aus,
warum Sie dort stehen,
wo Sie stehen.



Soziometrisches Kennenlernen:

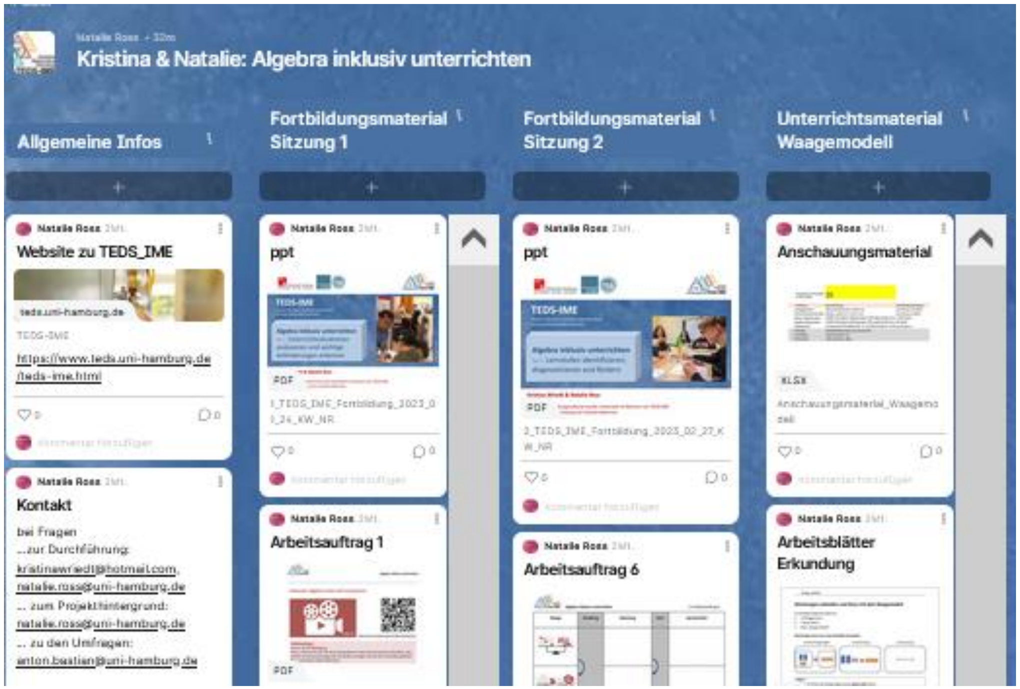
# Auf einer Skala von 1 bis 10: So zufrieden bin ich mit meiner bisherigen Umsetzung dieser Themen in heterogenen Lerngruppen.

## Was erwartet Sie heute


- **Unterscheidung von zentralen Lernvoraussetzungen im inklusiven MU**
  - ✓ welche fachlichen und überfachlichen Merkmale der Lernenden sind für ein erfolgreiches Lernen zu berücksichtigen
- **Exemplarische Unterscheidung von Anforderungsstufen zu Termumformungen**
  - ✓ wie kann eine Aufgabe zu Termumformungen variiert werden, um unterschiedliche Anspruchsniveaus zu berücksichtigen
- **Grundvorstellungen von Variablen**
  - ✓ erste Einsichten, warum für einen verstehensorientierten Algebra-Unterricht eine Unterscheidung von verschiedenen Grundvorstellungen notwendig ist
- **Am Beispiel einer Lernumgebung soll es darum gehen**
  - ✓ stoffdidaktisch zu analysieren, wie das Kalkül der Äquivalenzumformung verstehensorientiert umgesetzt werden kann (Grundvorstellung der Variablen als Unbekannte)

muss angepasst werden

## Padlet zur Fortbildung




https://padlet.com/natalieross7/kristina-natalie-algebra-inklusiv-unterrichten-lme9t0rsgwlgt4ks

## Unser Programm für heute

1. Begrüßung, Einleitung & Ziele für heute
2. **Differenzieren im inklusiven Algebra-Unterricht am Beispiel von Termumformunegn**

   2.1 Analyse eines typischen Differenzierungsbeispiels zu Termumformungen
3. Verstehensorientiertes Lernen am Beispiel von Äquivalenz-umformungen (Teil I)
4. Abschluss

## Differenzieren auf drei Niveaus

*Situation: Mathematiklehrerin Frau Pauli differenziert ihre Aufgaben auf drei Niveaus*

| Niedriges Niveau I | Mittleres Niveau II | Hohes Niveau III |
|---|---|---|
| Forme die Terme um. | Forme die Terme um und mache Proben. | Forme die Terme um und mache Proben. |
| (1) $3 \cdot (5x + 4)$ | (1) $3{,}25 \cdot (5x + 4.35)$ | (1) $3{,}25 \cdot (5x + 4.35) - 5{,}3\,x$ |
| …. | … | … |
| (30) $(20 + 3x) \cdot 5$ | (30) $(20{,}36 + 3{,}2\,x) \cdot 5{,}1$ | (30) $(20{,}36 + 3{,}2\,x) \cdot 5{,}1 - 3.4\,x$ |

(Prediger & Aufschnaiter, 2017, S.291)

### Arbeitsauftrag 1

1. Überlegen Sie kurz für sich allein:
   - Wonach wird hier differenziert?
   - Was halten Sie für gelungen?
   - Was halten Sie an dieser Form der Differenzierung für fragwürdig? Formulieren Sie entsprechende Fragen.
2. Tauschen Sie sich kurz zu dritt über diese Fragen aus.

## Differenzieren auf drei Niveaus

*Situation: Mathematiklehrerin Frau Pauli differenziert ihre Aufgaben auf drei Niveaus*

| **Niedriges Niveau I** | **Mittleres Niveau II** | **Hohes Niveau III** |
|---|---|---|
| Forme die Terme um. | Forme die Terme um und mache Proben. | Forme die Terme um und mache Proben. |
| (1) $3 \cdot (5x + 4)$ | (1) $3{,}25 \cdot (5x + 4.35)$ | (1) $3{,}25 \cdot (5x + 4.35) - 5{,}3\ x$ |
| …. | … | … |
| (30) $(20 + 3x) \cdot 5$ | (30) $(20{,}36 + 3{,}2\ x) \cdot 5{,}1$ | (30) $(20{,}36 + 3{,}2\ x) \cdot 5{,}1 - 3.4\ x$ |

(Prediger & Aufschnaiter, 2017, S.291)

- Frau Pauli differenziert (keine Selbstverständlichkeit!)
- Sie unterscheidet die „Kompliziertheit“ der Zahlen und die Anzahl der Glieder im Term.
- Sie vermutet, dass die leistungsschwächeren Schüler*innen nicht wissen, was eine Probe überhaupt ist (hier: Zahlen einsetzen, um die Wertgleichheit beider Terme zu prüfen).

## Fragen an diese Form der Differenzierung:

- Führt die Senkung des Anspruchs über die Variation der Merkmale ‚Anzahl der Nachkommastellen' und ‚Anzahl der Variablen' zu einem besseren Verstehen? → Verstehens-orientierung
- Werden die Lernenden durch eine große Anzahl von sehr ähnlichen rein kalkülorientierten Übungsaufgaben ausreichend kognitiv aktiviert? → kognitive Aktivierung
- Gibt es ggf. andere Merkmale neben der technischen Komplexität, die angepasst werden können, um Aufgaben einfacher oder anspruchsvoller zu machen? → Anforderungs-stufen

(adaptiert nach Prediger & Aufschnaiter, 2017; Prediger et al., 2020)

## Fragen an diese Form der Differenzierung:

- Sind alle Lernenden tatsächlich soweit, dass es für sie Sinn macht, das technische Kalkül der Termumformung zu lernen?
- Gibt es ggf. andere Inhalte, die Lernende in derselben Unterrichtseinheit erlernen können und die an ihr tatsächlich vorhandenes Vorwissen anknüpft?
- Wenn die leistungsschwachen Lernenden noch kein Verständnis dafür entwickelt haben, was eine Probe ist, ist es dann lernförderlich, an dieser Stelle diese Anforderung zu vermeiden oder sollte man dies fördern?
- Was müssten Schüler*innen lernen, denen entsprechende fachliche Voraussetzungen fehlen, um die Termumformungen auch mit Probe bewältigen zu können?

→ Lernstufen

Grundvorstellungen von Variablen

(adaptiert nach Prediger & Aufschnaiter, 2017; Prediger et al., 2020)

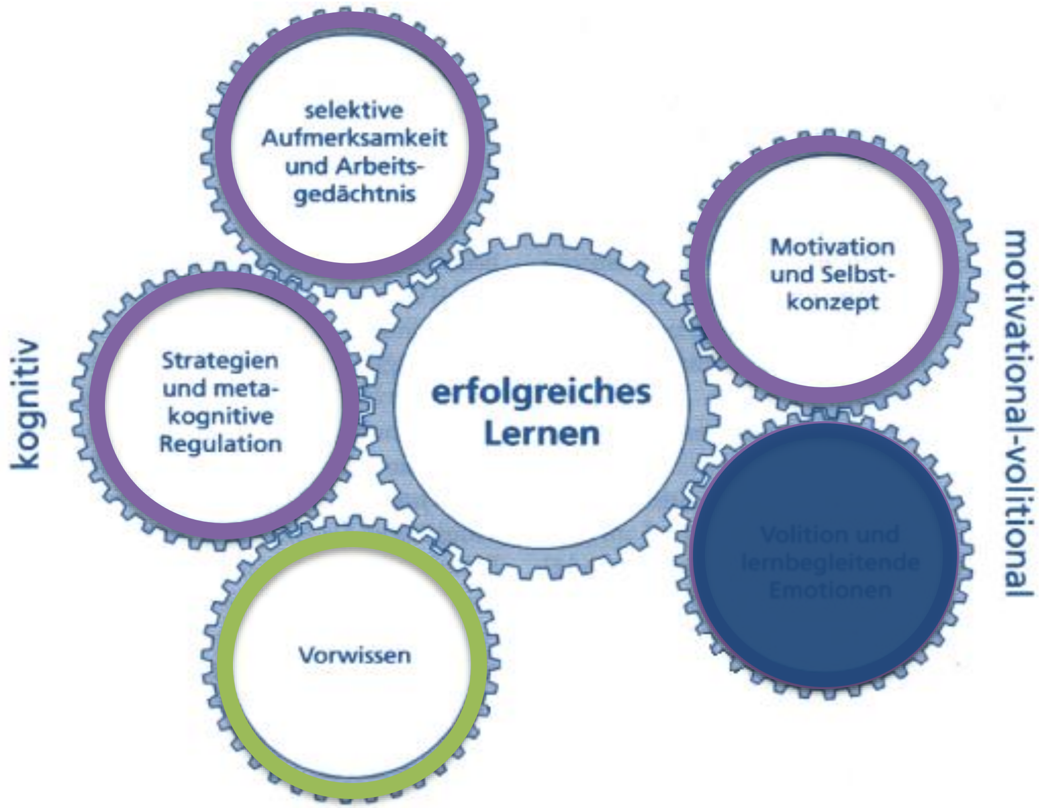
Inclusive Mathematics Education
TEDS-IME

## Algebra inklusiv unterrichten

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Anforderungen** | Lernvoraussetzung identifizieren | Lernvoraussetzung diagnostizieren | Lernvoraussetzung umgehen oder fokussiert fördern? |
| **Mathematik-didaktische** Denkkategorien | Anforderungs-stufen | Grund-vorstellungen | |
| **Pädagogische** Denkkategorien | | | |
| **Prinzipien & Orientierungen** | Verstehens-orientierung | Kognitive Aktivierung | |

(adaptiert nach Prediger et al., 2020)

## Welche Lernvoraussetzungen sind bisher noch nicht berücksichtigt?




Kategorien für individuelle Lernvoraussetzungen zum erfolgreichen Lernen
(*Hasselhorn & Gold, 2022, S.68)*

Inclusive Mathematics Education
TEDS-IME

## Algebra inklusiv unterrichten

**Anforderungen**

| Lernvoraussetzung identifizieren | Lernvoraussetzung diagnostizieren | Lernvoraussetzung umgehen oder fokussiert fördern? |
|---|---|---|

**Mathematik-didaktische** Denkkategorien

| Anforderungs-stufen | Lernstufen | Grund-vorstellungen | Darstellungs-vernetzung |
|---|---|---|---|

**Pädagogische** Denkkategorien

| Vorwissen | Aufmerksamkeit & Arbeitsgedächtnis | Motivation & Selbstkonzept | Lernstrategien & metakognitive Regulation |
|---|---|---|---|

**Prinzipien & Orientierungen**

| Verstehens-orientierung | Kognitive Aktivierung | Lernenden-orientierung & Adaptivität | Kommuni-kations-förderung | Durchgängig-keit |
|---|---|---|---|---|

(adaptiert nach Prediger et al., 2020)

# Unser Programm für heute

1. Begrüßung, Einleitung & Ziele für heute
2. **Differenzieren im inklusiven Algebra-Unterricht am Beispiel von Termumformungen**

   2.2 Differenzieren nach Anforderungsstufen
3. Verstehensorientiertes Lernen am Beispiel von Äquivalenz-umformungen (Teil I)
4. Abschluss

## Unterscheidung von Anforderungsstufen

Anforderungs-
stufen

**Anforderungsstufen:** Welche Merkmale machen Aufgaben schwer?

Viele verschiedene Versuche zu operationalisieren, was Aufgaben schwer macht u.a. Neubrand et al. (2002); Turner, Niss & Blum (2015); Lehner (2019); Leuders & Büchter (2005)

Hier pragmatischer Fokus auf Unterscheidung von kognitiven Aktivitäten:

| Anforderungsstufen kognitiver Aktivitäten | |
|---|---|
| 1 | Erinnern, Reproduzieren & Ausführen |
| 2 | Verstehen, Anwenden & Begründen |
| 3 | Analysieren, Bewerten & Beweisen |
| 4 | Kreativ Neu Denken |

(Barzel & Ebers, 2020 adaptiert u.a. nach Anderson & Krathwohl, 2001)

## Adaption von Aufgaben im Hinblick auf Anforderungsstufen

Anforderungs-
stufen

### Arbeitsauftrag 2

1. Ordnen Sie den drei Aufgaben von Frau Pauli jeweils die passende Anforderungsstufe zu.
2. Machen Sie dasselbe für die drei vorgegebenen Aufgabenvarianten.

*3.* Überlegen Sie, welche der 5 Aufgabenvarianten Sie in Ihrem Unterricht einsetzen würden.*

| **Niedriges Niveau I** | **Mittleres Niveau II** | **Hohes Niveau III** |
|---|---|---|
| Forme die Terme um. | Forme die Terme um und mache Proben. | Forme die Terme um und mache Proben. |
| (1) $3 \cdot (5x + 4)$ | (1) $3{,}25 \cdot (5x + 4.35)$ | (1) $3{,}25 \cdot (5x + 4.35) – 5{,}3\ x$ |
| …. | … | … |
| (30) $(20 + 3x) \cdot 5$ | (30) $(20{,}36 + 3{,}2\ x) \cdot 5{,}1$ | (30) $(20{,}36 + 3{,}2\ x) \cdot 5{,}1 – 3.4\ x$ |

(Prediger & Aufschnaiter, 2017, S.291)

## Aufgaben-Variante 1

- Setze die Klammern im Term anders und lass sie ganz weg.
- Forme die drei unterschiedlichen Terme jeweils um.
- Was verändert sich, was bleibt gleich? Vergleiche die Terme.
- Erkläre die Unterschiede.

*mögliche Erweiterung*

- Gehe bei den nachfolgenden Aufgaben ähnlich vor. Forme aber nur den Term um, der den größten Wert ergibt.

*erwartete Schüler*innen-Lösung*

$$\mathbf{3 \cdot (5x + 4) = 15x + 12}$$
$$\mathbf{(3 \cdot 5x) + 4 = 15x + 4}$$
$$\mathbf{3 \cdot 5x + 4 = 15x + 4}$$

Wenn man die beiden veränderten Terme umformt, erhält man denselben Term. Das liegt daran, dass die Klammern auch weggelassen werden können.
Die Umformung des ursprünglichen Terms ergibt einen größeren Term. Das liegt daran, dass hier beide Summanden innerhalb der Klammer verdreifacht werden.

## Aufgaben-Variante 2

*erwartete Schüler*innen-Lösung*

- Lisa formt den Term 3 (5x + 4) um und erhält 15x + 4. Sie will prüfen, ob sie einen Fehler gemacht hat und setzt in beiden Termen die Zahl 3 ein. Zu welchem Ergebnis kommt sie? Prüfe selber nach.
- Ihr Mitschüler Noah meint dazu: „Es kann doch sein, dass du einfach eine falsche Zahl eingesetzt hast.“ Was meinst du dazu?
- Erkläre Lisa, welchen Fehler sie gemacht hat.

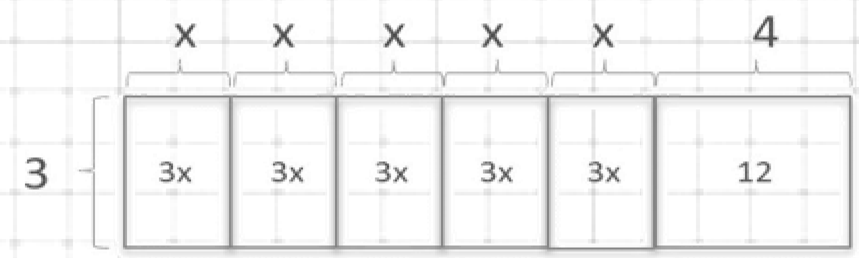
$\mathbf{3 \cdot (5 \cdot 3 + 4) = 3 \cdot 19 = 57}$
$\mathbf{15 \cdot 3 + 4 = 49}$
Wenn man 3 in beide Terme einsetzt, dann ergibt sich für beide Terme ein anderer Wert. D.h. dass sie einen Fehler bei der Umformung gemacht hat.
Noah hat nicht Recht, weil dass Ergebnis immer gleich sein muss. Der Term muss für alle Zahlen gleich groß sein.
Lisa hat beim Umformen vergessen, beide Summanden des Klammerterms mit 3 zu multiplizieren.

## Aufgaben-Variante 3

*erwartete Schüler*innen-Lösung*

Stelle den Term als Bild dar und finde einen weiteren Term.

- Erkläre anhand des Beispiels den Begriff der Gleichwertigkeit.
- Begründe, warum beide Terme gleichwertig sind.




$3x + 3x + 3x + 3x + 3x + 12 = 15x + 12$

Die Terme 3(5x +4) und 15x + 12 sehen unterschiedlich aus. Sie sind aber **gleichwertig**, weil sie beide richtig das gleiche Bild beschreiben.

Mit dem Term 3 (5x+4) wird die Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen 3 und 5x +4 berechnet. Der Term 15x + 12 ergibt sich, wenn man die Einzelflächen des Rechtecks addiert. Die Terme sind also gleichwertig.

# Unser Programm für heute

1. Begrüßung, Einleitung & Ziele für heute
2. **Differenzieren im inklusiven Algebra-Unterricht am Beispiel von Termumformungen**

   2.3 Differenzieren nach Variablenaspekten?
3. Verstehensorientiertes Lernen am Beispiel von Äquivalenz-umformungen (Teil I)
4. Abschluss

## Differenzieren nach Variablenaspekten?

Grundvorstellungen von Variablen

### Unterschiedliche Grundvorstellungen von Variablen Malle (1993)

- **Kalkülaspekt**
  die Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit welchem nach bestimmten Regeln operiert werden darf

**Aufgaben-Variante 1**

- Setze die Klammern im Term anders und lass sie ganz weg.
- Forme die drei unterschiedlichen Terme jeweils um.
- Was verändert sich, was bleibt gleich? Vergleiche die Terme.
- Erkläre die Unterschiede.

$$3 \cdot (5x + 4) = 15x + 12$$
$$(3 \cdot 5x) + 4 = 15x + 4$$
$$3 \cdot 5x + 4 = 15x + 4$$

Wenn man die beiden veränderten Terme umformt, erhält man denselben Term. Das liegt daran, dass die

## Differenzieren nach Variablenaspekten?

Grundvorstellungen von Variablen

### Unterschiedliche Grundvorstellungen von Variablen Malle (1993)

- **Einsetzungsaspekt**
  die Variable als Platzhalter für Zahlen, in die man Zahlen einsetzen darf

**Aufgaben-Variante 2**

- Lisa formt den Term 3 (5x + 4) um und erhält 15x + 4. Sie will prüfen, ob sie einen Fehler gemacht hat und setzt in beiden Termen die Zahl 3 ein. Zu welchem Ergebnis kommt sie? Prüfe selber nach.
- Ihr Mitschüler Noah meint dazu: „Es kann doch sein, dass du einfach eine

$3 \cdot (5 \cdot 3 + 4) = 3 \cdot 19 = 57$

$15 \cdot 3 + 4 = 49$

Wenn man 3 in beide Terme einsetzt, dann ergibt sich für beide Terme ein anderer Wert. D.h. dass sie einen Fehler bei der Umformung gemacht hat.

Noah hat nicht Recht, weil dass Ergebnis immer gleich sein muss. Der Term muss für alle Zahlen gleich groß

## Differenzieren nach Variablenaspekten?

Grundvorstellungen von Variablen

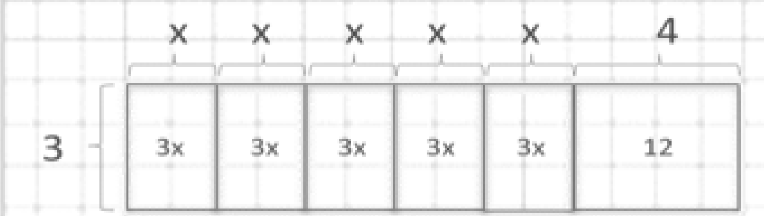
### Unterschiedliche Grundvorstellungen von Variablen Malle (1993)

- **Gegenstandsaspekt**
  die Variable als unbekannte oder **allgemeine**/ veränderliche Zahl, die etwas beschreibt, was eine inhaltliche Bedeutung umfasst

**Aufgaben-Variante 3**

Stelle den Term als Bild dar und finde einen weiteren Term.

- Erkläre anhand des Beispiels den Begriff der Gleichwertigkeit.
- Begründe, warum beide Terme gleichwertig sind.




$3x + 3x + 3x + 3x + 3x + 12 = 15x + 12$

Die Terme $3(5x + 4)$ und $15x + 12$ sehen unterschiedlich aus. Sie sind aber **gleichwertig**, weil sie beide richtig das gleiche Bild beschreiben.

## Differenzieren nach Grundvorstellungsaspekten?

Grundvorstellungen von Variablen

### Unterschiedliche Aspekte des Variablenbegriffs Malle (1993)

- **Kalkülaspekt**
  die Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit welchem nach bestimmten Regeln operiert werden darf
- **Einsetzungsaspekt**
  die Variable als Platzhalter für Zahlen, in die man Zahlen einsetzen darf
- **Gegenstandsaspekt**
  die Variable als unbekannte oder allgemeine/ veränderliche Zahl, die etwas beschreibt, was eine inhaltliche Bedeutung umfasst

Überbetonung des Kalkülaspekts

gerade bei schwächeren Lernenden werden andere Aspekte eher weggelassen

➢ Folge: Für viele Lernende erscheint Algebra als sinnlos und beliebig.

➢ Um allen Lernenden einen verständigen Umgang mit Algebra zu ermöglichen, müssen alle Grundvorstellungsaspekte Gegenstand des Unterrichts sein.

Malle (1993), Prediger (2009), Fischer, Hefendehl-Hebeker & Prediger (2010), Korntreff & Prediger (2021)

## Verstehensorientierung (Teil I)

In einem verstehensorientierten Mathematikunterricht soll zunächst das inhaltliche Verstehen vor dem rezeptartigen Anwenden des Kalküls stehen.

| | aktuelles Unterrichtsthema: Äquivalenzumformungen |
|---|---|
| konzeptuelles Verständnis | **neue Verstehenselemente** |
| prozedurale Fertigkeiten | **neue prozedurale Fertigkeiten** |

(adaptiert nach Prediger, 2020)


PAUSE

# Unser Programm für heute

1. Begrüßung, Einleitung & Ziele für heute
2. Differenzieren im inklusiven Algebra-Unterricht am Beispiel von Termumformungen
3. Verstehensorientiertes Lernen am Beispiel von Äquivalenz-umformungen (Teil I)
4. Abschluss

## Bedeutungen des Gleichheitszeichens

1. **Operationszeichen** (Aufforderung zum Rechnen)

$2 \cdot 3 + 5 =$

2. **Definitions-/ Setzungszeichen**

Sei $f(x) = 2x + 5$

**3. Vergleichszeichen**

- Beziehung gleichwertiger Terme

$2(x + 2{,}5) = 2x + 5$

- Formeln in einem Sachzusammenhang

Umfang für Rechteck
mit $a = x$ und $b = 2{,}5$
$U = 2x + 5$

- Gleichheit als Bedingung

Gesucht ist $x$ mit
$2x + 5 = 11$



(adaptiert nach Barzel et al., 2022)

# Bedeutungen des Gleichheitszeichens

1. **Operationszeichen** (Aufforderung zum Rechnen)

$2 \cdot 3 + 5 =$

2. **Definitions-/ Setzungszeichen**

Sei $f(x) = 2x + 5$

**3. Vergleichszeichen**

- Beziehung gleichwertiger Terme

$2(x + 2{,}5) = 2x + 5$

- Formeln in einem Sachzusammenhang

Umfang für Rechteck
mit $a = x$ und $b = 2{,}5$
$U = 2x + 5$

- Gleichheit als Bedingung

Gesucht ist $x$ mit
$2x + 5 = 11$



(adaptiert nach Barzel et al., 2022)

# Lösungsmöglichkeiten für Gleichungen

Gesucht ist *x* mit

2x + 5 = 11

**Gedankliches Lösen**

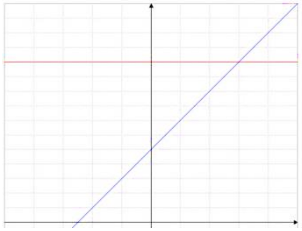
„Welche Zahl muss ich mit 2 multiplizieren und 5 addieren, um 11 zu erhalten?“

Eher geeignet für Aufgaben wie x+5=11

**Systematisches Probieren**

| | | |
|---|---|---|
| x = 1, | $2 \cdot 1 + 5 = 7$ | falsch |
| x = 2, | $2 \cdot 2 + 5 = 9$ | falsch |
| x = 3, | $2 \cdot 3 + 5 = 11$ | wahr |

**Graphisches Lösen**



**Rückwärtsrechnen**

$$x \underset{:2}{\overset{\cdot 2}{\rightleftarrows}} \boxed{?} \underset{-5}{\overset{+5}{\rightleftarrows}} = 11$$

x = (11 - 5) : 2



(adaptiert nach Barzel et al., 2022)

# Einführung in Äquivalenzumformungen

**Äquivalentes Umformen**

$$
\begin{aligned}
2x + 5 &= 11 \quad &|-5 \\
2x &= 6 \quad &|:2 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

**Arbeitsauftrag 3**

Überlegen Sie zu zweit für die symbolische Darstellungsebene:

- Worum geht es bei Äquivalenzumformungen?
- Was müssen Lernende hier erlernen?

## Einführung in Äquivalenzumformungen

**Neu zu erlernendes Wissen** (für Schüler*innen auf Regelniveau)

- **Handlungsabfolge von Äquivalenzumformungen**
  schrittweises und zielgerichtetes Umformen von einer Ausgangsgleichung zu einer vereinfachten, aber äquivalenten Gleichung, durch Umkehrung der vorhandenen Operationen
  - **„auf beiden Seiten der Gleichung das Gleiche tun“**
    so dass die neue Gleichung immer noch
    dieselbe(n) unbekannte(n) Zahl(en) beschreibt
  - **„x allein auf einer Seite“**
    zielgerichtet heißt Zielzustand der Umformungen zu (er-) kennen:
    die Variable x auf einer Seite zu isolieren, damit die
    unbekannte(n) Zahl(en) leicht abzulesen ist/sind

## Einführung in Äquivalenzumformungen

Zielperspektive vor dem Hintergrund der **Verstehensorientierung**:

**Aufbau eines verstehensbasierten Kalküls, das inhaltlich gedeutet werden kann**

| | *Kalkül* |
|---|---|
| **Gleichungs-äquivalenz** | Zwei Gleichungen sind durch Äquivalenzumformungen ineinander überführbar. |

↔

| *inhaltliche Deutung* |
|---|
| Zwei Gleichungen beschreiben dieselben unbekannten Zahlen. |

vgl. Korntreff & Prediger (2021)

# Einführung in Äquivalenzumformungen

| | aktuelles Unterrichtsthema |
|---|---|
| konzeptuelles Verständnis | • *Grundvorstellung von Gleichung als Bestimmungsgleichung und des Gleichheitszeichen als Aufforderung zur Bestimmung der Unbekannten* |
| prozedurale Fertigkeiten | • Handlungsabfolge von Äquivalenzumformungen:<br>➢ „auf beiden Seiten das Gleiche tun“<br>➢ „x allein auf einer Seite“ |

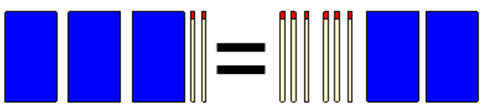
(adaptiert nach Prediger, 2020)

# Einführung in Äquivalenzumformungen

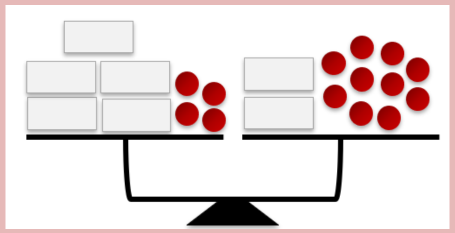
*mögliche unterrichtliche Umsetzungen*

## Knack die Box

(u.a. Affolter et al., 2003: mathbu.ch Band 1)

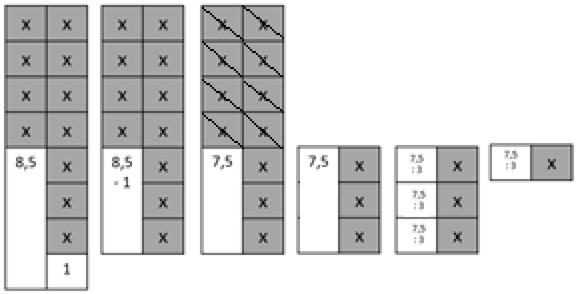


## Waagemodell



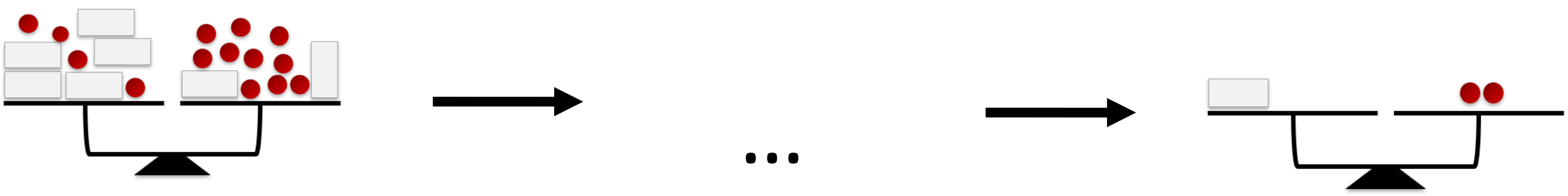
## Falt- bzw. Streifenmodell

(u.a. Roos & Kempen, eingereicht)



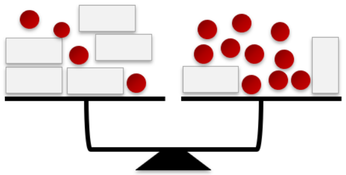
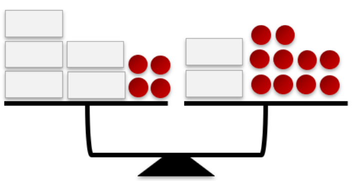
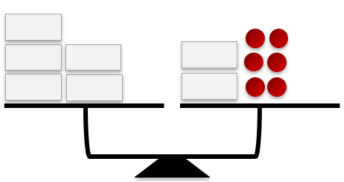
Alle 3 Unterrichtsideen haben jeweils Vorteile/ Nachteile… und klare Grenzen!

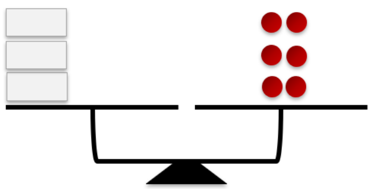
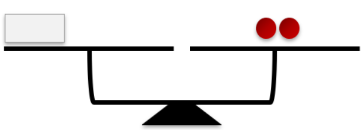
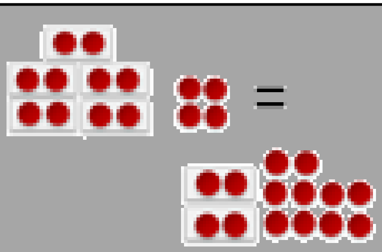
## Waagemodell



**Arbeitsauftrag 4**

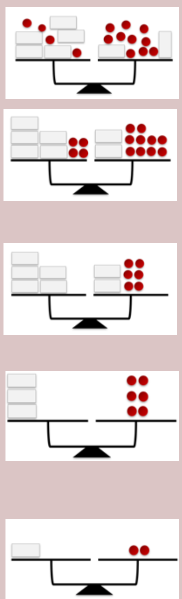
1. Vollziehen Sie schrittweise nach, wie Handlungen in diesem Modell den Aufbau des symbolischen Kalküls „Äquivalenzumformungen“ unterstützen. Nutzen Sie hierfür die Tabelle.
2. Überlegen Sie exemplarisch geeignete Sprachmittel.

| Waage | Handlung | Gleichung | Umf. |
|---|---|---|---|
|  | nach Steinen und Boxen sortieren | $x+x+4+x+x+x = x+x+10$ | Zusammenfassen |
|  | auf beiden Seiten 4 Steine wegnehmen | $5x + 4 = 2x + 10$ | $\vert - 4$ |
|  | auf beiden Seiten 2 Boxen wegnehmen | $5x + 4 - 4 = 2x + 10 - 4$<br>$5x = 2x + 6$ | $\vert -2x$ |
| | | $5x - 2x = 2x - 2x + 6$ | |

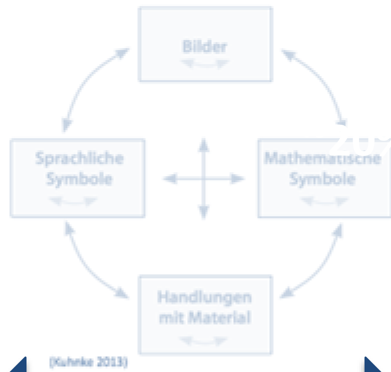
| Waage | Handlung | Gleichung | Umf. |
|---|---|---|---|
|  | auf beiden Seiten die Gegenstände jeweils in 3 gleich große Bündel ver-teilen. | $3x = 3 \cdot 2$ | $: 3$ |
|  | | $3x : 3 = 3 \cdot 2 : 3$<br>$x = 2$ | |
|  | Alle Boxen öffnen und Steine zählen. | **Probe**<br>$5x + 4 = 2x + 10$<br>$x = 2$<br>$5 \cdot 2 + 4 = 2 \cdot 2 + 10$<br>$14 = 14$ | x = 2 einsetzen |

## Waagemodell

### Durch enaktives Handeln zum mentalen Handeln kommen



enaktive Ebene




Darstellungsvernetzung

$$x+x+4+x+x+x = x+x+10$$

$$\begin{aligned}
5x + 4 &= 2x + 10 && \mid -4\\
5x + 4 - 4 &= 2x + 10 - 4\\
5x &= 2x + 6 && \mid -2x\\
5x - 2x &= 2x - 2x + 6\\
3x &= 3 \cdot 2 && \mid :3\\
3x : 3 &= 3 \cdot 2 : 3\\
x &= 2
\end{aligned}$$

symbolische Ebene

## Darstellungsvernetzung durch Versprachlichen

| Sprachmittel im Handlungskontext | Fachsprache |
|---|---|
| • Anzahl, die ich nicht kenne; man weiß nicht, wie viele…; in Boxen verpackt; unbekannt, gesucht,<br>• auf beiden Seiten der Waage, gleich viele Steine, Waage im Gleichgewicht<br>• aufräumen, sortieren | • Variable als unbekannte Zahl<br>• Gleichung aufstellen<br>• Zusammenfassen |
| • das Gleiche auf beiden Seiten der Waage wegnehmen, Waage im Gleichgewicht lassen | auf beiden Seiten der Gleichung …. abziehen/ subtrahieren |

## Darstellungsvernetzung durch Versprachlichen

| Sprachmittel im Handlungskontext | Fachsprache |
|---|---|
| • auf beiden Seiten der Waage in… gleich große Bündel teilen<br>• Anzahl der Steine auf Anzahl der Boxen verteilen | auf beiden Seiten der Gleichung durch… teilen/ dividieren |
| • Jetzt sehe ich: in einer Box sind … Steine verpackt | Die Lösung ist x gleich 2. |
| • *Überprüfen auf der Waage:* Sind beide Seiten im Gleichgewicht?<br>• *Überprüfen ohne Waage:* Boxen öffnen und nachzählen | • Lösung überprüfen,<br>• in Ausgangsgleichung… Wert für Variable… einsetzen |

## Unser Programm für heute

1. Begrüßung, Einleitung & Ziele für heute
2. Differenzieren im inklusiven Algebra-Unterricht am Beispiel von Termumformungen
3. Verstehensorientiertes Lernen am Beispiel von Äquivalenz-umformungen (Teil I)
4. Abschluss

# Differenzieren im inklusiven Algebra-Unterricht

**Reflexion**

Diskutieren Sie aus mathematikdidaktischer Perspektive:
Was muss Differenzierung im inklusiven Algebra-Unterricht leisten und was ist dazu notwendig?

## Fazit: Differenzierung im inklusiven Algebraunterricht sollte allen Schüler*innen…

… in ihrem Aneignungsprozess kognitiv aktivieren:

- hierzu sollte für alle Lernenden ein möglichst breites Spektrum an kognitiven Aktivitäten angeboten werden, um unterschiedliche Anforderungsstufen zu realisieren;
- im Hinblick auf die Förderung mathematischer Potentiale sollten anspruchsvolle kognitive Aktivitäten (insbes. zur Vernetzung, Vertiefung und Erweiterung) geplant werden. Häsel-Weide & Prediger (2017)

kognitive Aktivierung

Anforderungsstufen

… einen verständigen Umgang mit Algebra ermöglichen, indem alle Grundvorstellungsaspekte Gegenstand des Unterrichts werden:

- insbesondere ist eine Überbetonung des Kalkülaspekts zu vermeiden, damit das Tun im Algebra-Unterricht nicht als sinnlos und beliebig empfunden wird.

Verstehensorientierung

Grundvorstellungen von Variablen

## Fazit: Differenzierung im inklusiven Algebraunterricht sollte allen Schüler*innen...

... einen verstehensbasierten Umgang mit Kalkülen ermöglichen;

- hierzu ist eine stoffdidaktische Analyse notwendig, die ermittelt, worum es im Kern bei dem Verfahren geht und auf welche Grundvorstellungen man sich bezieht;
- hierzu ist das Prinzip der Darstellungsvernetzung ein vielversprechendes Mittel, weil es ...
  - vielfältige Zugänge,
  - ein Miteinander lernen und
  - ein profundes Verstehen ermöglicht.

Verstehensorientierung

Grundvorstellungen von Variablen

Darstellungsvernetzung

# Ausblick auf die nächste Sitzung

**23.09.**

1. Sitzung

Term- und Äquivalenz-umformungen

**14.10.**

2. Sitzung

Äquivalenz-umformungen

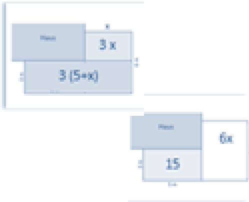
**18.11.**

3. Sitzung

Äquivalenz-umformungen

**24.02.**

4. Sitzung




Termgleich-wertigkeit

**24.03.**

5. Sitzung

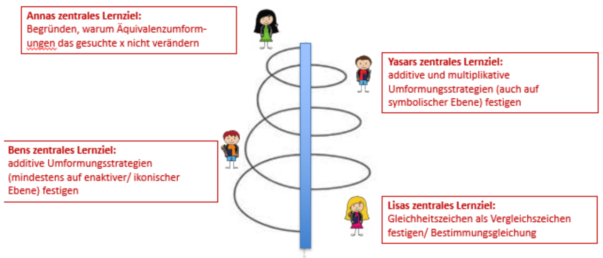
Terme aufstellen & beschreiben

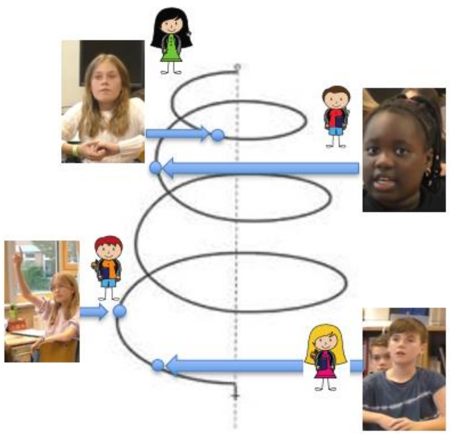
# Ausblick auf die nächste Sitzung

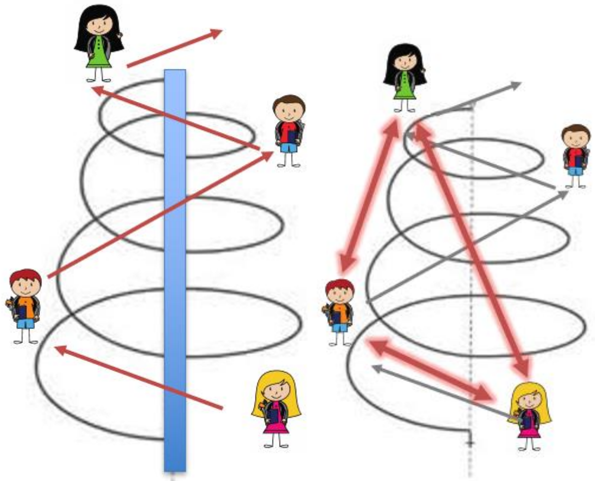
Durchgängigkeit

Lernstufen

Für das Thema Äquivalenzumformungen soll überlegt werden, wie ein Lernen auf unterschiedlichen Lernstufen möglich wird, bei dem **fehlendes Vorwissen** erarbeitet werden kann.



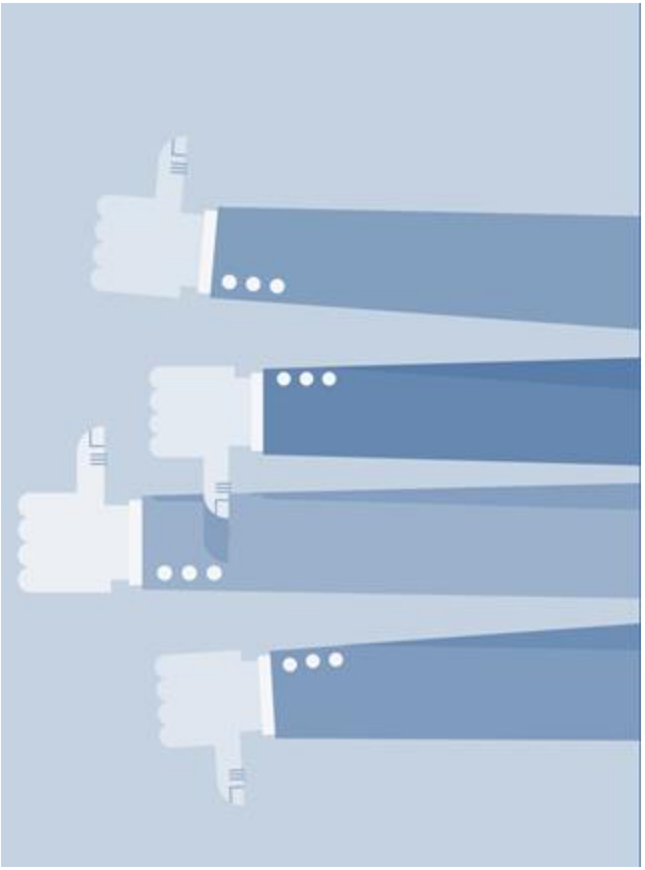





Lernvoraussetzung identifizieren → Lernvoraussetzung diagnostizieren → Lernvoraussetzung fokussiert fördern

# Wie hat Ihnen die Veranstaltung heute gefallen?

[Sprechen Sie mich gerne hinterher an, und sagen Sie mir genauer, was Sie sich anders wünschen oder was genau Ihnen gefallen hat.]



# danke!

## Literatur


- Anderson & Krathwohl (2001). A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing. A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives. Addison Wesley.
- Affolter, W., Nydegger, A., Wälti, B., Wieland, G. (2003): *Das Mathematikbuch*, 8. Schuljahr. Berner Lehrmittel- und Medienverlag. Bern/ Baar: Schulverlag plus AG/ Klett und Balmer AG.
- Barzel, B., Domokos, T., Dreher, A., Friesen, M., Holzäpfel, L., Larrain, M. & Weith, L. (2022). Algebra. Teil 1 & Teil 2. DZLM-Reihe MaCo, Diagnose und Förderung von Verstehensgrundlagen, Vortragsfolien
- Barzel, B., & Ebers, P. (2020). Kognitiv aktivieren – Eine wichtige Dimension fürs fachliche Lernen. mathematik lehren, 223, 24–28.
- Büchter, A. & Leuders, T. (2005). Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Berlin: Cornelsen.
- Häsel-Weide, U. & Prediger, S. (2017). Förderung und Diagnose im Mathematikunterricht – Begriffe, Planungsfragen und Ansätze. In Abshageb, Barzel, Kramer, Riecke-Baulecke, Rösken-Winter & Selter (Hrsg.). Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten. Seelze: Friedrich/ Klett-Kallmeyer, 167-181.
- Hasselhorn & Gold (2022). Pädagogische Psychologie. Erfolgreiches Lernen und Lehren. Stuttgart: Kohlhammer.
- Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. Praxis der Mathematik in der Schule, 52 (33), 1-7.
- Korntreff, S. & Prediger, S. (2022). Verstehensangebote von YouTube-Erklärvideos: Konzeptualisierung und Analyse am Beispiel algebraischer Konzepte. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *43*(2), 281–310. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00190-7

## Literatur


- Lehner, M. C. (2019). *Mathematikaufgaben für Leistungserhebungen im universitären Kontext*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-24578-8
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Neubrand, Michael; Klieme, Eckhard; Lüdtke, Oliver; Neubrand, Johanna (2002): Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung - In: Unterrichtswissenschaft 30 (2002) 2, S. 100-119 - URN: urn:nbn:de:0111-opus-76818 - DOI: 10.25656/01:7681
- Piezunka, A., Schaffus, T., Grosche, M. (2017). Vier Definitionen von schulischer Inklusion und ihr konsensueller Kern. Ergebnisse von Experteninterviews mit Inklusionsforschenden". In: Unterrichtswissenschaft – Zeitschrift für Lernforschung, Jg. 45, H. 4, 207-222.
- Prediger, S., Kuhl, J., Büscher, C. & Buró, S. (2020). Mathematik inklusiv lehren lernen: Entwicklung eines forschungsbasierten interdisziplinären Fortbildungskonzepts. Journal für Psychologie, 28(2), 288-312. doi.org/10.30820/0942-2285-2019-2-288
- Prediger, S. & von Aufschnaiter, C. (2017). Umgang mit heterogenen Lernvoraussetzungen aus fachdidaktishcer Perspektive: Fachspezifische Anforderungs- und Lernstufen berücksichtigen. In T. Bohl, J. Budde & M. Rieger-Ladich (Hrsg.), Studienbuch Umgang mit Heterogenität in Schule und Unterricht (S. 291-307). Bad Heilbrunn: Kinkhardt.
- Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül: Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I* (S. 213–234). Weinheim: Beltz.

## Literatur


- Roos, A.-K., & Kempen, L. (eingereicht). Solving algebraic equations by using the bar model: theoretical and empirical considerations.*Journal of mathematical behavior.*
- Turner, R., Blum, W. & Niss, M. (2015). Using Competencies to Explain Mathematical Item Demand: A Work in Progress. In: K. Stacey & R. Turner (Hrsg.), *Assessing Mathematical Literacy. The PISA Experience*. Springer. S. 85-116.
- Vollrath, H.-J. (2003). Algebra in der Sekundarstufe. Heidelberg/Berlin: Spektrum.